

Nederlandse versie (Dutch version): Please turn over to page 5.

EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Mathematics and Computer Science

2WAB0 Final test Calculus A; 29-01-2018, 18.00–21.00

Please separate this sheet from the rest of the exam. Make sure to fill out your name etc. on this sheet and on all other sheets that you hand in. Scratch paper does not need to be handed in.

The exam consists of 5 multiple choice questions and 7 open questions.

You can give your solutions in English (preferred) or in Dutch.

The backside of this sheet contains the multiple choice questions. Here you have to give the answers to the multiple choice questions. You are only required to encircle the correct answer. **For the multiple choice questions you get points for the encircled answers on THIS paper, not for answers given on the paper that you use for answering the open questions.** If you want to change your answer, make sure to clearly indicate your final choice.

The solutions to the open problems should be motivated, formulated clearly and arranged orderly.

The maximum score for the exam is 50 points. The maximum score for each question is indicated between brackets in the left margin. The grade for the exam is the total score divided by 5 and rounded to one decimal place.

The final grade of the course 2WAB0 is determined according to the rules stated in the study guide.

Use of laptop, calculator, books or written material is not allowed.

Surname and initials	
Identity number	
Program (ID, P&T, SI, HTI or AUBS)	
Tutor	
Tutor group	

Multiple choice questions; encircle the correct answer

- [4] 1. $\cos(\arcsin(\frac{3}{5}))$ is equal to
- A. $\frac{2}{5}$
 - B. $-\frac{4}{5}$
 - C. $\frac{4}{5}$
 - D. $-\frac{2}{5}$
- [4] 2. The linear approximation $L(x)$ of the function $f(x) = (\sin(x) - \cos(x))^2$ about $x = 0$ is
- A. $1 - 2x$
 - B. 1
 - C. $2 + x$
 - D. $1 + x$
- [4] 3. Give the equation of the tangent line in the point $(1, 1)$ to the curve implicitly given by $x^2y^2 - x = 3y - 3$.
- A. $y = x - 1$
 - B. $y = 2x - 1$
 - C. $y = \frac{1}{3}(x - 1) + 1$
 - D. $y = x$
- [4] 4. Solve
- $$\frac{6}{x-2} \leq \frac{3}{x-7}.$$
- A. $(x < 2) \vee (x > 7)$
 - B. $x \leq 12$
 - C. $(x < 2) \vee (7 < x \leq 12)$
 - D. $(x < 2) \vee (2 < x < 7) \vee (7 < x \leq 12)$
- [4] 5. Solve the initial value problem
- $$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-2}, \\ y(3) = 5. \end{cases}$$
- A. $y = e^{x-3} + 4$
 - B. $y = (x-2)^2 + 4$
 - C. $y = 5(x-3)^2 + 5$
 - D. $y = 5(x-2)^2$

Open questions

6. Anneke has solar panels on the roof of her house. She wants to know what the location of the sun is when the sun shines perpendicular to the solar panels. To this end, she first wants to determine a direction perpendicular to the solar panels.

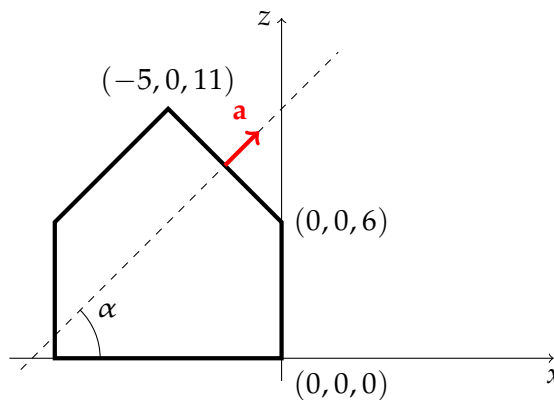


She chooses a coordinate system and determines the coordinates of the corner points of the roof. These points are $(0, 0, 6)$, $(0, 6, 6)$, $(-5, 0, 11)$ and $(-5, 6, 11)$ (bottom left, bottom right, top left and top right, respectively).

- [3] (a) Determine a vector \mathbf{a} that is perpendicular to the roof and points in the direction of the sun.

Now assume that the vector \mathbf{a} is equal to $\langle 1, 0, 1 \rangle$. This is not necessarily the correct answer to the previous question (a).

- [2] (b) Determine the angle α in the picture below (side view of the house).



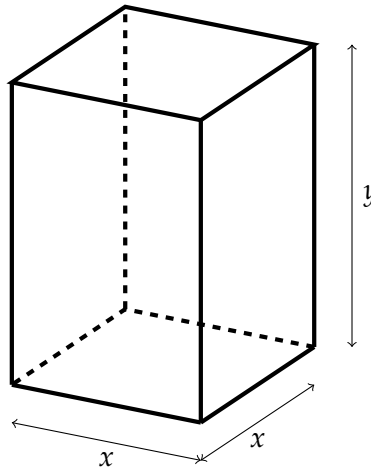
- [4] 7. Let $f(x) = x^{x+1}$. Find $f'(x)$.

8. Consider the function $f(x) = \frac{3}{\ln(x) - 1}$ with the interval (e, ∞) as its domain.

This function is 1-to-1 and has an inverse.

- [3] (a) Determine the inverse function $f^{-1}(y)$.
 [2] (b) What is the domain and range of $f^{-1}(y)$?

9. We consider the costs of making a box. The bottom of the box is a square with sides of x cm. The height of the box is y cm. See the figure below.



The sides and the top of the box are made of cardboard that costs a euro per cm^2 . The bottom of the box is of a stronger material that costs $2a$ euro per cm^2 .

- [2] (a) Show that the costs for the material of the box are $(3x^2 + 4xy)a$.

Assume that we want to make a box with volume $V = 1000 \text{ cm}^3$.

- [3] (b) Find x and y for which the costs for material have a minimum value.

- [4] 10. Evaluate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}.$$

- [4] 11. Determine $\int_0^{2\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

- [3] 12. Determine $\int e^{2x} \sin(x) dx$.

REMARK: See page 9 for the formulas.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

2WAB0 Eindtoets Calculus A; 29-01-2018, 18.00–21.00

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle bladen die u inlevert. Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het eind worden ingeleverd. Kladpapier hoeft u niet in te leveren.

Het tentamen bevat 5 multiple choice vragen en 7 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat de multiple choice vragen. Hierop dient u het antwoord op de multiple choice vragen te geven. Hierbij hoeft u alleen het juiste antwoord te omcirkelen. **Wat betreft de multiple choice vragen krijgt u punten voor de antwoorden die omcirkeld zijn op DEZE pagina, niet voor antwoorden die worden gegeven op het tentamenpapier dat u inlevert met de antwoorden op de open vragen.**

Indien u uw antwoord wilt veranderen: geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.

De uitwerkingen van de open opgaven dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen. Het aantal punten dat u voor een onderdeel kunt halen, staat tussen rechte haken voor het betreffende onderdeel vermeld. Het cijfer voor dit tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en dat tot op één cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WAB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studeerwijzer.

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Studierichting (ID, P&T, SI, HTI of AUBS)	
Tutor	
Tutorgroep	

zie volgende pagina

Multiple choice vragen; omcirkel het juiste antwoord

- [4] 1. $\cos(\arcsin(\frac{3}{5}))$ is gelijk aan
- A. $\frac{2}{5}$
 - B. $-\frac{4}{5}$
 - C. $\frac{4}{5}$
 - D. $-\frac{2}{5}$
- [4] 2. De lineaire benadering $L(x)$ van de functie $f(x) = (\sin(x) - \cos(x))^2$ in $x = 0$ is
- A. $1 - 2x$
 - B. 1
 - C. $2 + x$
 - D. $1 + x$
- [4] 3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt $(1, 1)$ aan de kromme die impliciet gegeven wordt door $x^2y^2 - x = 3y - 3$.
- A. $y = x - 1$
 - B. $y = 2x - 1$
 - C. $y = \frac{1}{3}(x - 1) + 1$
 - D. $y = x$
- [4] 4. Los op
- $$\frac{6}{x-2} \leq \frac{3}{x-7}.$$
- A. $(x < 2) \vee (x > 7)$
 - B. $x \leq 12$
 - C. $(x < 2) \vee (7 < x \leq 12)$
 - D. $(x < 2) \vee (2 < x < 7) \vee (7 < x \leq 12)$
- [4] 5. Los het volgende beginwaarden probleem op
- $$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x-2}, \\ y(3) = 5. \end{cases}$$
- A. $y = e^{x-3} + 4$
 - B. $y = (x-2)^2 + 4$
 - C. $y = 5(x-3)^2 + 5$
 - D. $y = 5(x-2)^2$

Open vragen

6. Anneke heeft zonnepanelen op haar dak en zij wil weten hoe de zon staat als deze loodrecht op de zonnepanelen schijnt. Daartoe wil zij eerst een richting bepalen loodrecht op de zonnepanelen.

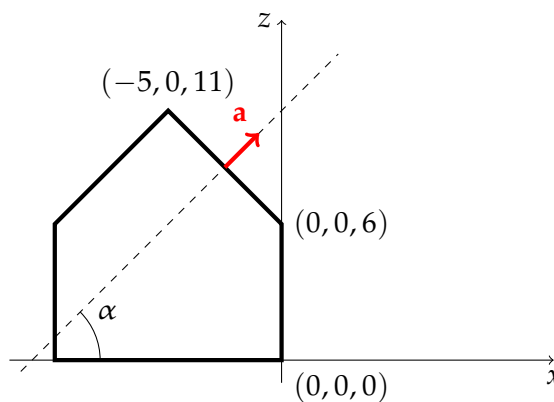


Ze kiest een coördinatenstelsel en bepaalt de coördinaten van de hoekpunten van het dak. De hoekpunten zijn $(0, 0, 6)$, $(0, 6, 6)$, $(-5, 0, 11)$ en $(-5, 6, 11)$ (respectievelijk linksonder, rechtsonder, linksboven en rechtsboven).

- [3] (a) Bepaal een vector \mathbf{a} die loodrecht op het dak staat en in de richting van de zon wijst.

Neem nu aan dat de vector \mathbf{a} gelijk is aan $\langle 1, 0, 1 \rangle$. Dit hoeft niet het antwoord op het vorige onderdeel te zijn.

- [2] (b) Bepaal de hoek α in onderstaand plaatje (een zijaanzicht van het huis).



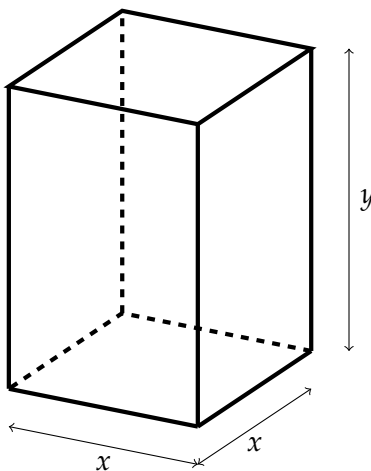
- [4] 7. Laat $f(x) = x^{x+1}$ zijn. Bepaal $f'(x)$.

8. Beschouw de functie $f(x) = \frac{3}{\ln(x) - 1}$ met als domein het interval (e, ∞) .

Deze functie is 1-op-1 en heeft een inverse.

- [3] (a) Bepaal de inverse functie $f^{-1}(y)$.
 [2] (b) Wat is het domein en bereik van $f^{-1}(y)$?

9. We kijken naar de kosten van het maken van een doos. De bodem van de doos is een vierkant met zijden van x cm. De hoogte van de doos is y cm. Zie de figuur hieronder.



De zijanten en de bovenkant van de doos worden gemaakt van karton dat a euro kost per cm^2 . De bodem van de doos is van een sterker materiaal dat $2a$ euro kost per cm^2 .

- [2] (a) Laat zien dat de kosten voor het materiaal van de doos gelijk zijn aan $(3x^2 + 4xy)a$.

Neem aan dat we een doos willen maken met volume $V = 1000 \text{ cm}^3$.

- [3] (b) Bepaal x en y zo dat de kosten voor het materiaal van de doos minimaal zijn.

- [4] 10. Bepaal

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}.$$

- [4] 11. Bepaal $\int_0^{2\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

- [3] 12. Bepaal $\int e^{2x} \sin(x) dx$.

Trigonometric Identities

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Vectors in plane and space

In the following $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ are three-dimensional position vectors.

- Dot product:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Cross product:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - b_2 a_3, -a_1 b_3 + b_1 a_3, a_1 b_2 - b_1 a_2 \rangle$$

- Component of \mathbf{a} along \mathbf{b} :

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Projection of \mathbf{a} onto \mathbf{b} :

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

Arc length, surface area and volume

Let f be a function that is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b)

- The arc length L of $y = f(x)$ on $[a, b]$ is $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

- Revolve the graph $y = f(x)$ about the x -axis on the interval $[a, b]$

The resulting object has area $A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

The volume of the object is $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Antiderivatives

$g(x)$	$\int g(x) dx$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(f(x))$
e^x	e^x
$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$
$\frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{a^2 - x^2}, \quad a > 0$	$\frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right $
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0$	$\arccos\left(\frac{x}{a}\right)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$

Remark:

All parameters are real numbers.
The integration constants have been omitted.