Nederlandse versie (Dutch version): Please turn over to page 6.

EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Mathematics and Computer Science

2WAB1 Final test Calculus A; 02-11-2016, 9.00–12.00

Please separate this sheet from the rest of the exam. Make sure to fill out your name etc. on this sheet and on all other sheets that you hand in. Scratch paper does not need to be handed in.

The exam consists of 5 multiple choice questions and 8 open questions.

You can give your solutions in English (preferred) or in Dutch.

The backside of this sheet contains the multiple choice questions. Here you have to give the answers to the multiple choice questions. You are only required to encircle the correct answer. If you want to change your answer, make sure to clearly indicate your final choice.

The solutions to the open problems should be motivated, formulated clearly and arranged orderly.

The maximum score for the exam is 50 points. The maximum score for each question is indicated between brackets in the left margin. The grade for the exam is the total score divided by 5 and rounded to one decimal place.

The final grade of the course 2WAB0 is determined according to the rules stated in the study guide.

Use of laptop, calculator, books or written material is not allowed.

Surname and initials	
Identity number	
Program (for example ID or P&T)	
Tutor	
Tutor group	

Multiple choice questions

[4] 1. Determine $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

A. 1
B. $\pi/4$
C. The integral diverges
D. $\pi/2$

[4] 2. What is the absolute (global) maximum and the absolute minimum of $f(x) = e^{-x^2}$ on the interval $[-3, 2]$?

A. The maximum is e^4 and the minimum is e^{-9}.
B. The maximum is e^9 and the minimum is 1.
C. The maximum is e^{-2} and the minimum is 0.
D. The maximum is 1 and the minimum is e^{-9}.

[4] 3. The limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5 + 3x^3 + 2x}{4x^5 + 4x^4 + x} \quad \text{is}$$

A. 2
B. The limit does not exist
C. $1/4$
D. 0

[4] 4. The value of $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi))$ is

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
B. $\frac{3}{4}\pi$
C. $\frac{1}{4}\pi$
D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

[4] 5. Find $y'(x)$ for $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$

A. $\dfrac{1 - xy^2}{2 + x^2y}$
B. $\dfrac{3 - xy^2}{2 + x^2y}$
C. $\dfrac{2 + x}{2 + x^2y}$
D. $\dfrac{1}{2 + x^2y}$

Open questions

[4] 6. Solve the equation $\cosh(x) + 3\sinh(x) + 1 = 0$.

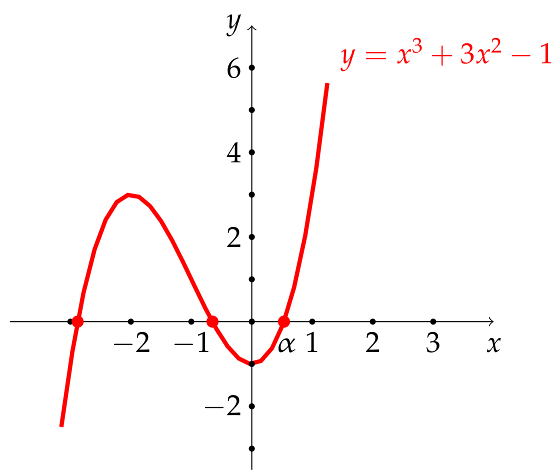
[4] 7. Let V be the plane containing the two lines:

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Give an equation of the plane V (An equation, so not a parametric representation).

8. The polynomial $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ has three zeros. We would like to find a numerical approximation for the largest zero, which we call α. See the figure below.

To approximate α, we apply Newton's method with starting value $x_0 = 1$. This means that we determine the linear approximation of f at $x = 1$ and compute where it intersects the horizontal axis.



[2] (a) Give the equation for the tangent line ℓ to the graph $y = f(x)$ at $x_0 = 1$.

[2] (b) The new approximation x_1 for α is the intersection point of ℓ with the x-axis. Find x_1.

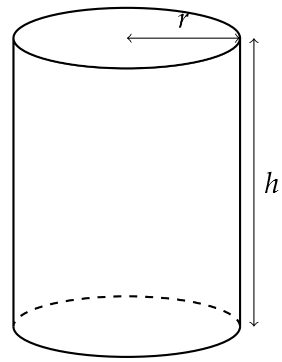
9. Let $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

[2] (a) Show that f has an inverse on its domain.

[1] (b) Determine the range of f^{-1}, the inverse of f.

[3] 10. Determine $\displaystyle\int \ln(\sin(x)) \cdot \cos(x)\, dx$.

11. Beer brewery *Anth & vanBerk* wants to redesign its beer cans. The new cans should have the shape of a cylinder with volume $330\,\text{cm}^3$ and minimal surface to reduce material costs. The radius of the cylinder is r and the height is h, see the figure.



The volume of the cylinder is $V = \pi r^2 h$. The area of the side of the cylinder is $2\pi r h$.

[2] (a) Give an expression for A, the total area of the cylinder. This is the sum of the areas of the top, bottom and side.

[2] (b) Find expressions for r and h for which the volume $V = 330\,\text{cm}^3$ and the total area is minimized.

[4] 12. Consider the graph of the function $f(x) = x^3$ on the interval $[0, 1]$. When we revolve the graph around the x-axis, we get the trumpet shape in Figure 1. The surface area A of this trumpet is given by the integral

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Find the surface area of the trumpet.

Figure 1: Function (left), side view of its surface of revolution (middle) and top view (right)

13. Radioactive elements are chemically unstable elements that gradually decay into other, more stable elements. The rate at which a radioactive element decays is proportional to the amount present.
Let $y(t)$ be the amount of a radioactive element at time t. Then $y(t)$ satisfies the differential equation

$$y'(t) = k y(t), \qquad t > 0,$$

with k constant.
Assume we have an amount of $y(0) = 88$ gram tritium. The half-life of tritium is 12.3 years, so after 12.3 years we have 44 gram of tritium left.

[2] (a) Find $y(t)$ by solving the differential equation and determine k.

[2] (b) After how many years do we have 11 gram of tritium left?

FORMULAS PROVIDED AT THE EXAM

Trigonometric Identities

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos^2(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

Vectors in plane and space

In the following $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ are three-dimensional position vectors.

- Dot product:
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
- Cross product:
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \langle a_2b_3 - b_2a_3, -a_1b_3 + b_1a_3, a_1b_2 - b_1a_2\rangle$$
- Component of $\mathbf{a}$ along $\mathbf{b}$:
$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$$
- Projection of $\mathbf{a}$ onto $\mathbf{b}$:
$$\mathbf{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2}\mathbf{b}$$

Arc length, surface area and volume

Let f be a function that is continuous on $[a,b]$ and differentiable on (a,b)

- The arc length L of $y = f(x)$ on $[a,b]$ is $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$
- Revolve the graph $y = f(x)$ about the x-axis on the interval $[a,b]$
  The resulting object has area $A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$
  The volume of the object is $V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx$

Antiderivatives

$g(x)$	$\int g(x)\,dx$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
e^x	e^x
$a^x, \quad a>0, a\neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}, \quad a>0$	$\dfrac{1}{a}\arctan(\dfrac{x}{a})$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}, \quad a>0$	$\dfrac{1}{2a}\ln(\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a>0$	$\arcsin(\dfrac{x}{a})$
$\dfrac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a>0$	$\arccos(\dfrac{x}{a})$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$

Remark:
All parameters are real numbers.
The integration constants have been omitted.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

2WAB1 Eindtoets Calculus A; 02-11-2016, 9.00–12.00

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle bladen die u inlevert. Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het eind worden ingeleverd. Kladpapier hoeft u niet in te leveren.

Het tentamen bevat 5 multiple choice vragen en 8 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat de multiple choice vragen. Hierop dient u het antwoord op de multiple choice vragen te geven. Hierbij hoeft u alleen het juiste antwoord te omcirkelen. Indien u uw antwoord wilt veranderen: geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.

De uitwerkingen van de open opgaven dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen. Het aantal punten dat u voor een onderdeel kunt halen, staat tussen rechte haken voor het betreffende onderdeel vermeld. Het cijfer voor dit tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en dat tot op één cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WAB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studeerwijzer.

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Studierichting (bijvoorbeeld ID of P&T)	
Tutor	
Tutorgroep	

---

zie volgende pagina

Multiple choice vragen

[4] 1. Bepaal $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

A. 1

B. $\pi/4$

C. De integraal divergeert

D. $\pi/2$

[4] 2. Wat is het absolute (globale) maximum en het absolute minimum van $f(x) = e^{-x^2}$ op het interval $[-3, 2]$?

A. Het maximum is e^4 en het minimum is e^{-9}.

B. Het maximum is e^9 en het minimum is 1.

C. Het maximum is e^{-2} en het minimum is 0.

D. Het maximum is 1 en het minimum is e^{-9}.

[4] 3. De limiet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5 + 3x^3 + 2x}{4x^5 + 4x^4 + x} \quad \text{is}$$

A. 2

B. De limiet bestaat niet

C. 1/4

D. 0

[4] 4. De waarde van $\arcsin(\sin(\frac{3}{4}\pi))$ is

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{3}{4}\pi$

C. $\frac{1}{4}\pi$

D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

[4] 5. Bepaal $y'(x)$ voor $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$

A. $\frac{1 - xy^2}{2 + x^2y}$

B. $\frac{3 - xy^2}{2 + x^2y}$

C. $\frac{2 + x}{2 + x^2y}$

D. $\frac{1}{2 + x^2y}$

Open vragen

[4] 6. Los de vergelijking $\cosh(x) + 3\sinh(x) + 1 = 0$ op.

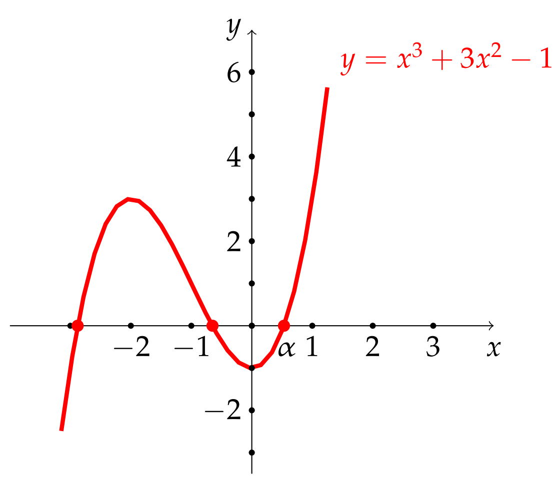
[4] 7. Het vlak V bevat de volgende twee lijnen:

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geef een vergelijking voor het vlak V (Een vergelijking, dus niet een parametervoorstelling).

8. Het polynoom $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ heeft drie nulpunten. We willen een numerieke benadering bepalen van het grootste nulpunt, dat we α noemen. Zie de figuur.

Om α te benaderen, gebruiken we de methode van Newton met startwaarde $x_0 = 1$. Dit betekent dat we de lineaire benadering van f voor $x = 1$ bepalen en vervolgens berekenen waar deze de x-as snijdt.



[2] (a) Bepaal de vergelijking van de raaklijn ℓ aan de grafiek van $y = f(x)$ voor $x_0 = 1$.

[2] (b) De nieuwe benadering x_1 van α is het snijpunt van ℓ met de x-as. Bepaal x_1.

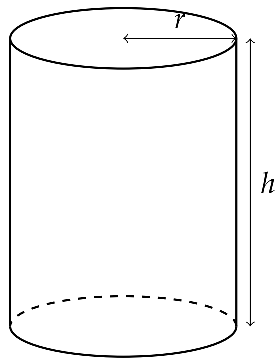
[4] 9. Laat $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

[2] (a) Laat zien dat f een inverse heeft op zijn domein.

[1] (b) Bepaal het bereik van f^{-1}, de inverse van f.

[3] 10. Bepaal $\int \ln(\sin(x)) \cdot \cos(x)\, dx$.

11. Bierbrouwerij *Anth & vanBerk* wil haar bierblikjes opnieuw vormgeven. De nieuwe blikjes hebben de vorm van een cilinder met inhoud 330 cm^3 en minimale oppervlakte om materiaalkosten uit te sparen. De straal van de cilinder is r en de hoogte is h, zie de figuur.



De inhoud van de cilinder is $V = \pi r^2 h$. De oppervlakte van de zijkant is $2\pi rh$.

[2] (a) Geef een uitdrukking voor A, de totale oppervlakte van de cilinder. Dat is de som van de oppervlakten van de bovenkant, onderkant en zijkant.

[2] (b) Geef uitdrukkingen voor r en h waarvoor de inhoud $V = 330\,\mathrm{cm}^3$ is en de totale oppervlakte minimaal is.

[4] 12. We kijken naar de grafiek van de functie $f(x) = x^3$ op het interval $[0, 1]$. Als we de grafiek wentelen rond de x-as, dan krijgen we de trompetvorm in Figuur 1. De oppervlakte A van deze trompet wordt gegeven door de integraal

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\,\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Bepaal de oppervlakte van de trompet.

Figure 1: Functie (links), zijaanzicht trompet (midden) en bovenaanzicht (rechts)

13. Radioactieve elementen zijn onstabiele chemische elementen die vervallen tot andere, stabielere elementen. De snelheid waarmee een element vervalt is evenredig met de hoeveelheid ervan.
Laat $y(t)$ de hoeveelheid zijn van een radioactief element op tijdstip t. Dan voldoet $y(t)$ aan de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = ky(t), \qquad t > 0,$$

met k een constante. Neem aan dat we een hoeveelheid $y(0) = 88$ gram tritium hebben. De halfwaardetijd van tritium is 12.3 jaar, dus na 12.3 jaar is er nog 44 gram tritium over.

[2] (a) Bepaal $y(t)$ door de differentiaalvergelijking op te lossen en bepaal k.

[2] (b) Na hoeveel jaar hebben we nog 11 gram tritium over?