Nederlandse versie (Dutch version): Please turn over to page 5.

EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Department of Mathematics and Computer Science

2WAB0 Final test Calculus A; 1-11-2017, 9.00–12.00

Please separate this sheet from the rest of the exam. Make sure to fill out your name etc. on this sheet and on all other sheets that you hand in. Scratch paper does not need to be handed in.

The exam consists of 5 multiple choice questions and 7 open questions.

You can give your solutions in English (preferred) or in Dutch.

The backside of this sheet contains the multiple choice questions. Here you have to give the answers to the multiple choice questions. You are only required to encircle the correct answer. **For the multiple choice questions you get points for the encircled answers on THIS paper, not for answers given on the paper that you use for answering the open questions**.
If you want to change your answer, make sure to clearly indicate your final choice.

The solutions to the open problems should be motivated, formulated clearly and arranged orderly.

The maximum score for the exam is 50 points. The maximum score for each question is indicated between brackets in the left margin. The grade for the exam is the total score divided by 5 and rounded to one decimal place.

The final grade of the course 2WAB0 is determined according to the rules stated in the study guide.

Use of laptop, calculator, books or written material is not allowed.

Surname and initials	
Identity number	
Program (ID, P&T, SI, HTI or AUBS)	
Tutor	
Tutor group	

Multiple choice questions; encircle the correct answer

[4] 1. Suppose the size of a particular animal's pupils expand and contract depending on the amount of light available. Let $f(x) = \dfrac{210x^{-0.7} + 80}{7x^{-0.7} + 8}$ be the size in mm of the pupils at light intensity x. Find the largest possible size of the pupils by finding $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

A. 10 mm
B. 30 mm
C. $\frac{58}{3}$ mm
D. 1 mm

[4] 2. Let $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 25}$. Find the values of the global extrema of f on the interval $[-1, 6]$.

A. global maximum $\frac{1}{9}$, global minimum $-\frac{1}{10}$
B. global maximum $\frac{1}{10}$, global minimum $-\frac{1}{26}$
C. global maximum $\frac{1}{9}$, global minimum $-\frac{1}{26}$
D. global maximum $\frac{1}{10}$, global minimum $-\frac{1}{10}$

[4] 3. Let $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{\cos(x)} (t^2 + 2)\, dt$. Find the derivative f'.

A. $f'(x) = -\sin(x)\cos^2(x) - 8x^2$
B. $f'(x) = 2\cos(x) - 4x$
C. $f'(x) = \cos^2(x) - 4x^2$
D. $f'(x) = -\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin(x) - 8x^2 - 4$

[4] 4. Use implicit differentiation to find $\dfrac{dy}{dx}$ if: $\sin(x) = e^{-y\cos(x)}$.

A. $\dfrac{dy}{dx} = y\tan(x) - e^{y\cos(x)}$
B. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - e^{y\cos(x)}\tan(x)}{\sin(x)}$
C. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y\cos(x)}(\cos(x) - y\sin(x))$
D. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\sin(x) - e^{-y\cos(x)}}{\cos(x)}$

[4] 5. The differential equation $y' = 5t^3y^2$ is separable.
Find the general solution in an explicit form.

A. $y = \dfrac{4}{5t^4 + C}$
B. $y = -\dfrac{4}{5t^4} + C$
C. $y = \dfrac{4}{5t^4} + C$
D. $y = -\dfrac{4}{5t^4 + C}$

Open questions

6. Consider the lines

$$l : \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, 3\rangle + s\langle -1, 1, 0\rangle, \quad s \in \mathbb{R},$$
$$m : \langle x, y, z\rangle = \langle 5, 8, 1\rangle + t\langle 2, 3, -1\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

[2] (a) Show that l and m intersect.

[1] (b) Give a normal vector of the plane V that contains both l and m.

[2] (c) Give an equation of the plane V.

[4] 7. Solve: $-7\cosh(x) + 8\sinh(x) = 1$.

8. The function $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$f(x) = \sqrt{x^5 + x + 2}.$$

[2] (a) Determine the derivative f' and show that f has an inverse.

[3] (b) Let g be this inverse. Determine $g'(6)$.

[4] 9. Let $f(x) = x^x$. Find $f'(x)$.

[4] 10. Consider the graph of the function $f(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$ on the interval $[0, 1]$. When we revolve the graph around the x-axis, we get the trumpet shape in Figure 1. The surface area A of this trumpet is given by the integral

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\,\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Find the surface area of the trumpet.

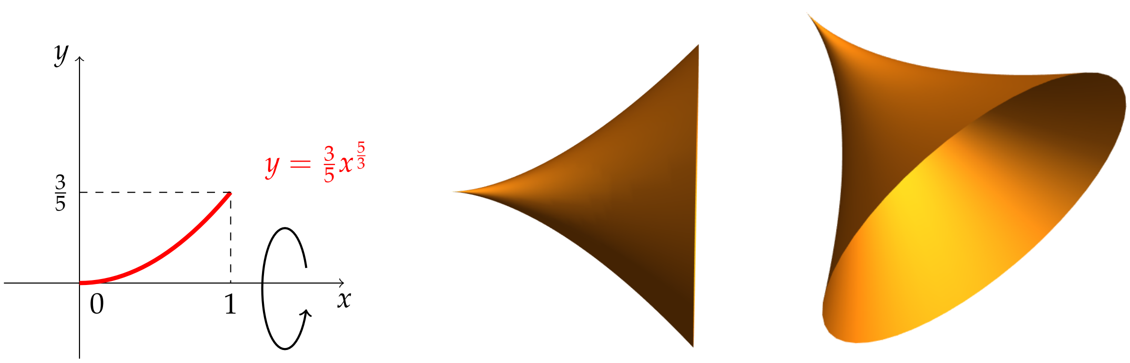


Figure 1: Function (left), side view of its surface of revolution (middle) and top view (right)

[4] 11. Find $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(2x)\,dx$.

[4] 12. Find $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}$.

Trigonometric Identities

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos^2(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^2(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

Vectors in plane and space

In the following $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ are three-dimensional position vectors.

- Dot product:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Cross product:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - b_2 a_3, -a_1 b_3 + b_1 a_3, a_1 b_2 - b_1 a_2 \rangle$$

- Component of **a** along **b**:

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$$

- Projection of **a** onto **b**:

$$\mathbf{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2} \mathbf{b}$$

Arc length, surface area and volume

Let f be a function that is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b)

- The arc length L of $y = f(x)$ on $[a, b]$ is $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
- Revolve the graph $y = f(x)$ about the x-axis on the interval $[a, b]$
  The resulting object has area $A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
  The volume of the object is $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$

Antiderivatives

$g(x)$	$\int g(x)\, dx$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x) \rvert)$
e^x	e^x
$a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0$	$\dfrac{1}{a} \arctan(\dfrac{x}{a})$
$\dfrac{1}{a^2 - x^2}, \quad a > 0$	$\dfrac{1}{2a} \ln(\left\lvert \dfrac{a+x}{a-x} \right\rvert)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0$	$\arcsin(\dfrac{x}{a})$
$\dfrac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0$	$\arccos(\dfrac{x}{a})$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$

Remark:
All parameters are real numbers.
The integration constants have been omitted.

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

2WAB0 Eindtoets Calculus A; 1-11-2017, 9.00–12.00

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle bladen die u inlevert. Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het eind worden ingeleverd. Kladpapier hoeft u niet in te leveren.

Het tentamen bevat 5 multiple choice vragen en 7 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat de multiple choice vragen. Hierop dient u het antwoord op de multiple choice vragen te geven. Hierbij hoeft u alleen het juiste antwoord te omcirkelen. **Wat betreft de multiple choice vragen krijgt u punten voor de antwoorden die omcirkeld zijn op DEZE pagina, niet voor antwoorden die worden gegeven op het tentamenpapier dat u inlevert met de antwoorden op de open vragen**.
Indien u uw antwoord wilt veranderen: geef duidelijk aan wat uw uiteindelijke keuze is.

De uitwerkingen van de open opgaven dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen. Het aantal punten dat u voor een onderdeel kunt halen, staat tussen rechte haken voor het betreffende onderdeel vermeld. Het cijfer voor dit tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en dat tot op één cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WAB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studeerwijzer.

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Studierichting (ID, P&T, SI, HTI of AUBS)	
Tutor	
Tutorgroep	

---

zie volgende pagina

Multiple choice vragen; omcirkel het juiste antwoord

[4] 1. Van een dier worden de pupillen groter of kleiner afhankelijk van de hoeveelheid licht. Laat $f(x) = \dfrac{210x^{-0.7} + 80}{7x^{-0.7} + 8}$ de grootte van de pupillen zijn in mm als de hoeveelheid licht x is. Bepaal de maximale grootte van de pupillen door de limiet $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ te bepalen.

A. 10 mm
B. 30 mm
C. $\frac{58}{3}$ mm
D. 1 mm

[4] 2. Laat $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 25}$ zijn.
Bepaal de waarden van de globale extrema van f op het interval $[-1, 6]$.

A. globaal maximum $\frac{1}{9}$, globaal minimum $-\frac{1}{10}$
B. globaal maximum $\frac{1}{10}$, globaal minimum $-\frac{1}{26}$
C. globaal maximum $\frac{1}{9}$, globaal minimum $-\frac{1}{26}$
D. globaal maximum $\frac{1}{10}$, globaal minimum $-\frac{1}{10}$

[4] 3. Laat $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{\cos(x)} (t^2 + 2)\, dt$ zijn. Bepaal de afgeleide f'.

A. $f'(x) = -\sin(x)\cos^2(x) - 8x^2$
B. $f'(x) = 2\cos(x) - 4x$
C. $f'(x) = \cos^2(x) - 4x^2$
D. $f'(x) = -\sin(x)\cos^2(x) - 2\sin(x) - 8x^2 - 4$

[4] 4. Bepaal met behulp van impliciet differentiëren $\dfrac{dy}{dx}$ als: $\sin(x) = e^{-y\cos(x)}$.

A. $\dfrac{dy}{dx} = y\tan(x) - e^{y\cos(x)}$
B. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - e^{y\cos(x)}\tan(x)}{\sin(x)}$
C. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y\cos(x)}(\cos(x) - y\sin(x))$
D. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\sin(x) - e^{-y\cos(x)}}{\cos(x)}$

[4] 5. De differentiaalvergelijking $y' = 5t^3y^2$ is separabel.
Bepaal de algemene oplossing.

A. $y = \dfrac{4}{5t^4 + C}$
B. $y = -\dfrac{4}{5t^4} + C$
C. $y = \dfrac{4}{5t^4} + C$
D. $y = -\dfrac{4}{5t^4 + C}$

Open vragen

6. Beschouw de rechte lijnen

$$l : \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, 3\rangle + s\langle -1, 1, 0\rangle, \quad s \in \mathbb{R},$$
$$m : \langle x, y, z\rangle = \langle 5, 8, 1\rangle + t\langle 2, 3, -1\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

[2] (a) Laat zien dat l en m elkaar snijden.

[1] (b) Bepaal een normaalvector van het vlak V waar l en m beide in liggen.

[2] (c) Bepaal een vergelijking van V.

[4] 7. Los op: $\quad -7\cosh(x) + 8\sinh(x) = 1.$

8. De functie $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd als

$$f(x) = \sqrt{x^5 + x + 2}.$$

[2] (a) Bepaal de afgeleide f' en laat zien dat f een inverse heeft.

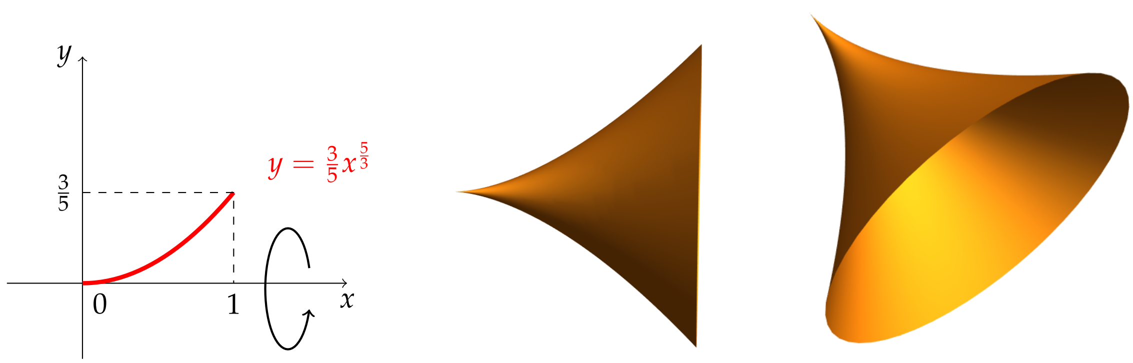
[3] (b) Laat g de inverse van f zijn. Bepaal $g'(6)$.

[4] 9. Laat $f(x) = x^x$ zijn. Bepaal $f'(x)$.

[4] 10. We kijken naar de grafiek van de functie $f(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$ op het interval $[0, 1]$. Als we de grafiek wentelen rond de x-as, dan krijgen we de trompetvorm in Figuur 1. De oppervlakte A van deze trompet wordt gegeven door de integraal

$$A = 2\pi \int_0^1 f(x)\,\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Bepaal de oppervlakte van de trompet.



Figuur 1: Functie (links), zijaanzicht trompet (midden) en bovenaanzicht (rechts)

[4] 11. Bepaal $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(2x)\,dx.$

[4] 12. Bepaal $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$