Multiple choice questions

1. Multiple Choice Questions

   (a) **English**: The complete solution of the inequality $\dfrac{8}{x-1} \leq \dfrac{2}{x-7}$ is given by

   Dutch: De volledige oplossing van de ongelijkheid $\dfrac{8}{x-1} \leq \dfrac{2}{x-7}$ wordt gegeven door

   i. $(1 < x < 7)$
   ii. $(x \leq 1) \vee (7 \leq x)$
   iii. $(x < 1) \vee (7 < x)$
   iv. $(x < 1) \vee (7 < x \leq 9)$

   (b) **English**: Which line passes through the points $(2,4)$ and $(3,1)$?
   Dutch: Welke lijn gaat door de punten $(2,4)$ en $(3,1)$?

   i. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
   ii. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
   iii. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
   iv. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (c) **English**: Consider the following function $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 3 & \text{if } x < 1, \\ 5x - 4 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$

   In $x = 1$ the function is

   Dutch: Beschouw de volgende functie $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 3 & \text{if } x < 1, \\ 5x - 4 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$

   In $x = 1$ is de functie

   i. continuous and differentiable
   continu en differentieerbaar
   ii. not continuous but differentiable
   niet continu maar wel differentieerbaar
   iii. continuous but not differentiable
   continu maar niet differentieerbaar
   iv. not continuous and not differentiable
   niet continu en niet differentieerbaar

(d) **English**: Find the absolute (or global) extrema of the given function on the indicated interval.
Dutch: Geef de absolute (of globale) extrema van de gegeven functie op het gegeven interval.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+16} \text{ on } [-2, 6].$$

i. absolute minimum $-\frac{1}{10}$, absolute maximum $\frac{1}{4}$
ii. absolute minimum $\frac{1}{10}$, absolute maximum $\frac{3}{26}$
iii. absolute minimum $-\frac{1}{10}$, absolute maximum $\frac{1}{8}$
iv. absolute minimum 0, absolute maximum $\frac{1}{4}$

(e) **English**: The slope of the tangent line at point $(-3, 1)$ of curve $x^2y + xy^2 = 6$ is
Dutch: De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(-3, 1)$ aan de kromme $x^2y + xy^2 = 6$ is

i. 1
ii. $-\frac{3}{5}$
iii. $\frac{5}{3}$
iv. -2

(f) **English**: Determine $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$.
Dutch: Bepaal $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$.

i. 0
ii. 2
iii. $\frac{1}{2}$
iv. 1

(g) **English**: Determine $\tan(\arccos(-\frac{12}{13}))$.
Dutch: Bepaal $\tan(\arccos(-\frac{12}{13}))$.

i. $\dfrac{169}{144}$
ii. $\dfrac{5}{13}$
iii. $-\dfrac{5}{13}$
iv. $-\dfrac{5}{12}$

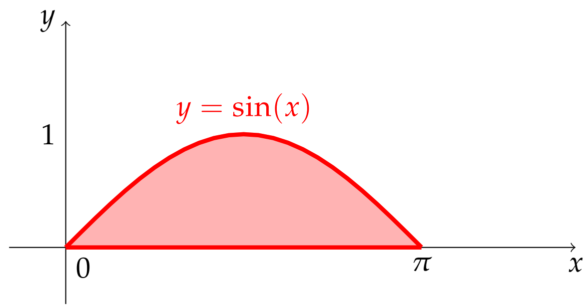
(h) **English**: Determine $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
Dutch: Bepaal $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

i. $\sqrt{1+x^2} + C$
ii. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$
iii. $\dfrac{1}{2}\left(\arctan(x) - x\sqrt{1+x^2}\right) + C$
iv. $\ln|x+1| + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$

Open questions

2. Consider the graph of the function $f(x) = \sin(x)$ on the interval $[0, \pi]$. In this question we compute the center of gravity of the region enclosed by the graph and the x-axis. See the figure below.

   Beschouw de grafiek van de functie $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, \pi]$. In deze vraag berekenen we het zwaartepunt van het gebied dat wordt omsloten door de grafiek en de x-as. Zie de figuur hieronder.



[1] (a) We denote the area of the red region by A. Compute A.
We noemen de oppervlakte van het rode gebied A. Bereken A.

[2] (b) The x-coordinate of the center of gravity is given by $x_C = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$.
Compute x_C.
De x-coördinaat van het zwaartepunt is $x_C = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$.
Bereken x_C.

[2] (c) The y-coordinate of the center of gravity is given by $y_C = \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$.
Compute y_C.
De y-coördinaat van het zwaartepunt is $y_C = \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$.
Bereken y_C.

[3] 3. Consider the planes $x + z = 3$ and $x - 4y + 3z = 5$.
Find a vector equation for the line of intersection of these planes.
Gegeven zijn de vlakken $x + z = 3$ en $x - 4y + 3z = 5$.
Bepaal een vectorvoorstelling van de snijlijn van deze vlakken.

[4] 4. A room is 6 m high and 10 m wide. We want to hang a cable across the width of the room for attaching LED-lights (see figure below).

In the middle the cable should be 3 meters above the floor. The shape of the hanging cable is the catenary given by

$$y = f(x) = a \cosh \frac{x}{b},$$

with $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Find a and b.

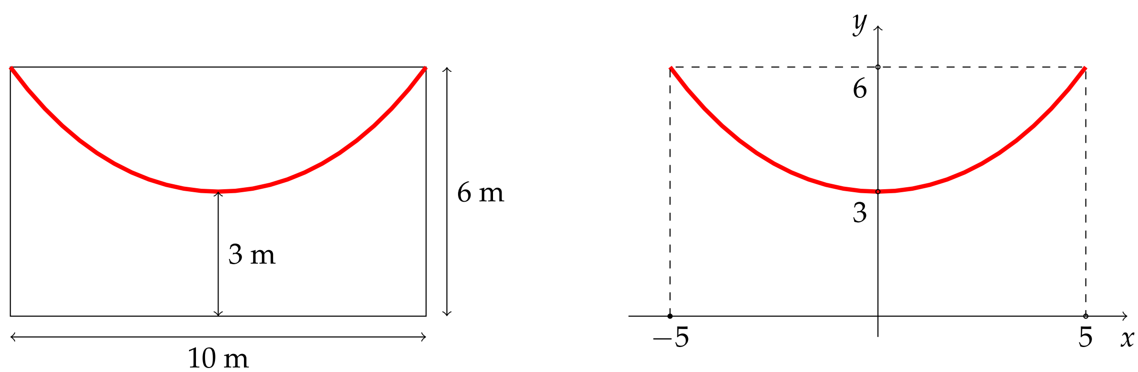
Een zaal is 6 meter hoog en 10 meter breed. Men wil over de hele breedte een ketting hangen om daar LED-lampjes aan te kunnen bevestigen (zie figuur).

In het midden moet de ketting 3 meter boven de vloer zijn. De kettinglijn kan worden beschreven met de vergelijking

$$y = f(x) = a \cosh \frac{x}{b},$$

met $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Bepaal a en b.



[4] 5. Evaluate

Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}.$$

6. Consider the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by $f(x) = x^3 + 2x^2 + 7x - 3$.

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x^3 + 2x^2 + 7x - 3$.

[2] (a) Show that f has an inverse.
Laat zien dat f een inverse heeft.

[2] (b) Find $(f^{-1})'(7)$.
Bepaal $(f^{-1})'(7)$.

[3] 7. Consider the function $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$.
Find the arc length of the graph $y = f(x)$ between $x = 9$ and $x = 36$.
Beschouw de functie $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$.
Bepaal de booglengte van de grafiek $y = f(x)$ tussen $x = 9$ en $x = 36$.

[3] 8. Let y be a function of t. Solve the initial value problem
Laat y een functie van t zijn. Los het volgende beginwaardeprobleem op

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{t-1}, \\ y(2) = 5. \end{cases}$$

9. An internet warehouse wants to reduce its packaging costs. Given is a square sheet of cardboard with dimensions 30 cm by 30 cm. We cut off four little squares at the four corners of the sheet and fold along the dashed lines to create a box. Note that we get an open box (it has no top) in this way. See Figure 1.

Our goal is to maximize the volume V of the open box.

Een internetwinkel wil de verpakkingskosten beperken. Gegeven is een vierkant stuk karton met afmeting 30 cm bij 30 cm. We snijden vier kleine vierkantjes af bij de vier hoeken van het stuk karton en vouwen het karton langs de stippellijnen om een doos te maken. Merk op dat we op deze manier een open doos krijgen. Zie Figuur 1.

Het doel is om het volume V van de doos te maximaliseren.

[2] (a) Show that $V = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.
Laat zien dat $V = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

[2] (b) Find the length x of the little squares such that V has maximum value.
Bepaal de lengte x van de zijde van de kleine vierkantjes zo dat V maximaal is.

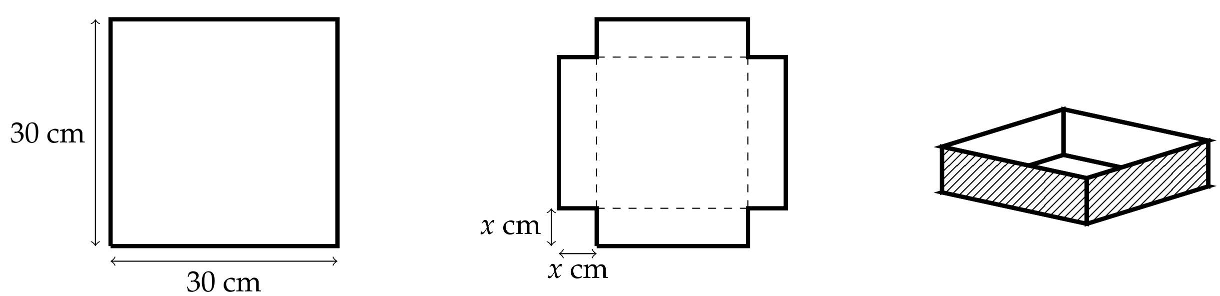


Figure 1: Making an open box from a square sheet of cardboard. Het maken van een open doos uit een vierkant stuk karton.